

EIVIND KOLFLAATH



III KARNOV
GROUP

FORMALLOGIKK

Forord

Denne boken er en fremstilling av klassisk setnings- og predikatlogikk, som jeg med enkelte avbrekk har undervist i siden begynnelsen av 1990-tallet. Ambisjonen har vært å skrive en norskspråklig lærebok som egner seg for studenter uten bakgrunn fra matematikk, programmering eller andre formelle disipliner. Et synlig utslag av denne ambisjonen er at formelle begreper og metoder blir mer møy-sommelig forklart her enn i en del andre lærebøker om de samme temaene.

Boken innledes med et kapittel som introduserer generelle logiske begreper og dessuten gir en oversikt over hva som kommer i bokens to hoveddeler om setningslogikk (kapittel 2–6) og predikatlogikk (kapittel 7–12). Med få unntak bygger etterfølgende kapitler i større eller mindre utstrekning på de foregående. Unntakene er at kapitlene 7 og 8 ikke forutsetter kapitlene 5 og 6, og at kapittel 9 bare forutsetter kapitlene 1–4 og 7.

Tidligere versjoner av teksten har vært pensum i logikkemner ved Universitetet i Bergen siden 2014. På bakgrunn av både egne og andres erfaringer med teksten brukt i undervisning, er den blitt endret på en rekke punkter. Endringene omfatter notasjon, terminologi, begreper, bevisregler og eksempler. Dessuten er stoffet nå presentert i en mer oversiktlig typografi.

I boken er det mange eksempler, men ingen øvingsoppgaver. På nettsiden <http://folk.uib.no/hfiek/Formallogikk.html> er det lagt ut øvingsoppgaver til ulike kapitler i boken.

Klassisk formallogikk er langt på vei intellektuelt felleseie, og i en lærebok som denne vil det i liten grad være nødvendig å vise til annen litteratur. Det bør likevel nevnes at systemet for naturlig deduksjon som presenteres i denne boken, i realiteten er så å si identisk med bevissystemet *PD* i Bergmann, Moor og Nelson: *The Logic Book* for så vidt gjelder de basale slutningsreglene. Blant de systemene for naturlig deduksjon jeg har hatt befåtning med opp igjennom

VI

årene, er dette etter min oppfatning det enkleste og mest elegante. Nevnes bør det også at de metalogiske bevisene for tremetoden i hovedsak følger bevisene i Jeffrey: *Formal Logic. Its Scope and Limits*. Men til forskjell fra Jeffreys fremstilling har jeg tydeliggjort at ugyldighetskorrekthet og fullstendighet er ulike metalogiske egenskaper. Underveis i teksten har jeg henvist bare til disse to bøkene, men i litteraturlisten har jeg listet opp de lærebøkene som har bidratt mest til å forme min forståelse av temaene, og hvis forfattere jeg dermed står i gjeld til. I opplistingen av den enkelte bok har jeg tatt med en eventuell senere, siste utgave i parentes. Det finnes et enormt utvalg av engelskspråklige lærebøker om klassisk formallogikk, og min litteraturliste skal ikke oppfattes som at jeg anbefaler de opplistede bøkene fremfor andre lærebøker om samme tema.

Personer som har bidratt underveis i den lange skriveprosessen, fortjener takk. En rekke personer har påpekt feil og kommentert andre forhold i tidligere versjoner. Dette gjelder særlig Kevin Cahill, Svein Hetland, Kåre Johnsen og Tore Fjetland Øgaard, som alle har gitt kommentarer til en tidligere versjon i sin helhet, men også Pål Fjeldvig Antonsen, Mette Kristine Hansen, Ole Thomassen Hjortland, Jørn Jacobsen, Gunnar Karlsen og Kjetil Mangset Skjerve, som har kommentert deler av en tidligere versjon. Antonsen og Hjortland har også vært verdifulle samtalepartnere i generelle diskusjoner om undervisning i formallogikk. Mange av kommentarene til teksten gjaldt udiskutable feil, men det var også kommentarer som var utslag av faglige og/eller pedagogiske preferanser. På enkelte punkter spriker preferansene blant dem som har kommentert, og det har ikke vært mulig å oppfylle alle ønsker. Men kommentarene har uansett tvunget meg til å tenke mer igjennom fordeler og ulemper ved ulike alternativer. I det hele tatt har prosessen med å skrive denne teksten ført meg dypere inn i temaene enn det som var nødvendig for å undervise i andres lærebøker om formallogikk.

Når teksten nå blir publisert som bok på forlag, vil jeg rette en stor takk til redaksjonssjef Ida Vibeke Kyhring, som stadig vekk ville utgi boken.

Til slutt vil jeg takke Ellen og Selma, som har vært med meg i årene fra teksten ble påbegynt og til den ble fullført. Vi har en spennende tid foran oss.

Bergen, 5. oktober 2020

Eivind Kolflaath
(eivind.kolflaath@uib.no)

Innhold

1 ET OVERBLIKK	1
1.1 Formallogikk og formallogisk form	1
1.2 Setninger, påstander og sannhet	3
1.3 Generelle logiske egenskaper	5
1.3.1 Oversikt	5
1.3.2 Logisk sannhet	5
1.3.3 Logisk usannhet	6
1.3.4 Logisk kontingens	7
1.3.5 Logisk konsistens (og inkonsistens)	8
1.3.6 Logisk følge	10
1.3.7 Logisk gyldighet (og ugyldighet)	11
1.3.8 Logisk ekvivalens	13
1.4 Begrepet om logisk form må konkretiseres	14
1.5 Formallogiske språk	16
1.6 Formallogiske bevissystemer	19
1.7 Metalogikk	20
1.8 Begreper introdusert i kapittel 1	22

SETNINGSLOGIKK

2 DET SETNINGSLOGISKE SPRÅKET	27
2.1 Generelt om setningslogisk analyse	27
2.2 Syntaktisk beskrivelse av språket	29
2.3 Semantisk beskrivelse av språket	33
2.3.1 Oversikt	33

2.3.2 Negasjonsoperatoren	34
2.3.3 Konjunksjonsoperatoren	36
2.3.4 Disjunksjonsoperatoren	37
2.3.5 Kondisjonaloperatoren	39
2.3.6 Bikondisjonaloperatoren	41
2.3.7 Semantiske regler	42
2.3.8 Litt om oversettelse til det setningslogiske språket	48
2.4 Setningslogiske egenskaper	49
2.4.1 Begrepet om sannhetsverditildelinger	49
2.4.2 Setningslogisk sannhet	51
2.4.3 Setningslogisk usannhet	52
2.4.4 Setningslogisk kontingens	52
2.4.5 Setningslogisk konsistens (og inkonsistens)	53
2.4.6 Setningslogisk følge	54
2.4.7 Setningslogisk gyldighet (og ugyldighet)	55
2.4.8 Setningslogisk ekvivalens	56
2.4.9 Reduksjon til setningslogisk egenskap ved én formel	56
2.4.10 Formeltyper og setningslogiske egenskaper	58
2.5 Begreper introdusert i kapittel 2	59
3 SANNHETSTABELLMETODEN	61
3.1 Generelt om sannhetstabeller	61
3.2 Sannhetstabellmetoden i bruk	
3.2.1 Konstruksjon av sannhetstabell steg for steg	63
3.2.2 Flere sannhetstabeller med to setningskonstanter	66
3.2.3 Sannhetstabell med tre setningskonstanter	73
3.2.4 Test av setningslogisk følge og gyldighet	73
3.2.5 Sannhetstabeller med formeltyper	76
3.3 Bevis for at tre setningsoperatører er overflødige	77
3.4 Bevissystemet sammenfattet	80
3.5 Begreper introdusert i kapittel 3	82
4 TREMETODEN	83
4.1 Behovet for et alternativt bevissystem	83
4.2 Logisk gyldighet via logisk inkonsistens	84
4.2.1 Sammenhengen mellom gyldighet og inkonsistens	84
4.2.2 Sammenhengen konkretisert til setningslogikk	85
4.3 Tremetoden i bruk	87

4.3.1 Et første eksempel	87
4.3.2 Generelle begreper og treregelen for disjunksjon	89
4.3.3 Et avsluttet tre med åpen sti	91
4.3.4 Treregelen for konjunksjon	93
4.3.5 Samme initialsett, annen rekkefølge	95
4.3.6 Treregelen for dobbel negasjon	96
4.3.7 De seks øvrige trereglene	97
4.3.8 Behandling av parallelle linjer	101
4.3.9 Bevis for setningslogiske egenskaper ved én formel	103
4.3.10 Unntakstilfeller: Ingen treregler i bruk	104
4.3.11 Rekkefølgen for anvendelse av trereglene	105
4.3.12 Eksempel med alle trereglene brukt én gang	105
4.3.13 Tremetoden er arbeidsbesparende	108
4.4 Bevissystemet sammenfattet	110
4.4.1 Trereglene i setningslogikken	110
4.4.2 Generelt om tremetoden i setningslogikk	112
4.5 Begreper introdusert i kapittel 4	113
5 NATURLIG DEDUKSJON	115
5.1 Generelt om naturlig deduksjon	115
5.2 Basale slutningsregler	116
5.2.1 Slutningsregelen for reiterasjon	116
5.2.2 Slutningsreglene for konjunksjon	118
5.2.3 Introduksjonsregelen for disjunksjon	122
5.2.4 Eliminerasjonsregelen for kondisjonal	122
5.2.5 Eliminerasjonsregelen for bikondisjonal	123
5.2.6 Eliminerasjonsregelen for dobbel negasjon	124
5.2.7 Et mer omfattende eksempel	124
5.2.8 Bruk av hjelpeantakelser i logisk resonnering	128
5.2.9 Introduksjonsregelen for kondisjonal	129
5.2.10 Tilgjengelige linjer i et bevis	133
5.2.11 Introduksjonsregelen for negasjon	135
5.2.12 Bevis for setningslogisk sannhet	141
5.2.13 Eliminerasjonsregelen for disjunksjon	143
5.2.14 Introduksjonsregelen for bikondisjonal	145
5.2.15 To mer avanserte eksempler	145
5.2.16 Noen avsluttende bemerkninger om delbevis	148
5.2.17 Bevis for setningslogisk inkonsistens	148

5.2.18 Oversikt over de basale slutningsreglene	150
5.3 Avledede slutningsregler	152
5.3.1 Fordelen med tilleggsregler	152
5.3.2 Oversikt over setningslogiske tilleggsregler	154
5.3.3 Eksempler med setningslogiske tilleggsregler	156
5.3.4 Tilleggsreglene kan avledes fra de basale reglene	158
5.4 Bevissystemet sammenfattet	159
5.5 Begreper introdusert i kapittel 5	160
6 METALOGIKK	161
6.1 Spørsmålet om et bevissystems pålitelighet	161
6.1.1 Bevissystemene har et korrektiv	161
6.1.2 Fire metalogiske problemstillinger	162
6.2 Sannhetstabellmetoden	164
6.2.1 Metoden vil alltid terminere	164
6.2.2 Sunnhet, ugyldighetskorrekthet og fullstendighet	167
6.3 Tremetoden	170
6.3.1 Metoden vil alltid terminere	170
6.3.2 Sunnhet (gyldighetskorrekthet)	176
6.3.3 Ugyldighetskorrekthet	181
6.3.4 Fullstendighet og litt til	188
6.4 Naturlig deduksjon	190
6.5 Andre setningslogiske egenskaper	191
6.6 Begreper introdusert i kapittel 6	192

PREDIKATLOGIKK

7 DET PREDIKATLOGISKE SPRÅKET	197
7.1 Generelt om predikatlogisk analyse	197
7.2 Syntaktisk beskrivelse av språket	201
7.2.1 Predikatlogiske formler	201
7.2.2 Setninger og åpne formler	208
7.3 Semantisk beskrivelse av språket (uformelt)	209
7.3.1 Formell og uformell semantikk	209
7.3.2 Individkonstanter og predikatkonstanter	210
7.3.3 Kvantorer	214
7.3.4 Både kvantorer og setningsoperatører	215

7.3.5 Diskutable oversettelser	217
7.4 Predikatlogiske egenskaper	228
7.4.1 Mulige scenarioer	228
7.4.2 Predikatlogisk sannhet	234
7.4.3 Predikatlogisk usannhet	235
7.4.4 Predikatlogisk kontingens	235
7.4.5 Predikatlogisk konsistens (og inkonsistens)	236
7.4.6 Predikatlogisk følge	236
7.4.7 Predikatlogisk gyldighet (og ugyldighet)	237
7.4.8 Predikatlogisk ekvivalens	238
7.4.9 Mulige scenarioer som bevis	238
7.4.10 Reduksjon til predikatlogisk egenskap ved én formel	240
7.5 Begreper introdusert i kapittel 7	240
8 FORMELL SEMANTIKK	243
8.1 Generelt om predikatlogikkens formelle semantikk	246
8.2 Forberedelse: Litt mengdeteori	246
8.2.1 Generelt om beskrivelser av mengder	246
8.2.2 Delmengder	249
8.2.3 Ordnete mengder	249
8.2.4 Kartesisk produkt	250
8.2.5 Relasjoner	251
8.2.6 Funksjoner	254
8.3 Begrepet om interpretasjoner	257
8.3.1 Interpretasjoner gir semantiske verdier	257
8.3.2 Interpretasjonens univers	258
8.3.3 Semantiske verdier for individkonstanter	259
8.3.4 Semantiske verdier for predikatkonstanter	260
8.3.5 Semantiske verdier for setningskonstanter	262
8.3.6 Minimumskrav til interpretasjoner	263
8.3.7 Intensjonale beskrivelser av univers og ekstensjoner	264
8.4 Sannhet via tilfredsstillelse	267
8.4.1 Variabeltilordninger	267
8.4.2 Tilfredsstillelsesbetingelser	271
8.4.3 Sannhet i en interpretasjon	280
8.4.4 To eksempler	281
8.5 Predikatlogiske egenskaper redefinert	285
8.6 Begreper introdusert i kapittel 8	287

9 TREMETODEN	289
9.1 Sammenlikning med setningslogikken	289
9.2 Tremetoden i bruk	291
9.2.1 Bare treregler fra setningslogikken	291
9.2.2 Hva de nye trereglene skal dekke	293
9.2.3 Treregelen for universell kvantor	293
9.2.4 Modifisering av begrepet om avsluttede stier	296
9.2.5 Treregelen for eksistensiell kvantor	298
9.2.6 Trereglene for negerte kvantorer	299
9.2.7 Anbefalt rekkefølge for de nye trereglene	301
9.2.8 Eksempel med alle de nye trereglene i bruk	304
9.3 Predikatlogisk versus setningslogisk analyse	307
9.4 Bevissystemet sammenfattet	311
9.4.1 Trereglene i predikatlogikken	311
9.4.2 Generelt om tremetoden i predikatlogikk	314
9.5 Begreper introdusert i kapittel 9	315
10 NATURLIG DEDUKSJON	317
10.1 Generelt om naturlig deduksjon i predikatlogikk	317
10.2 Basale slutningsregler	318
10.2.1 Oversikt	318
10.2.2 Introduksjonsregelen for eksistensiell kvantor	319
10.2.3 Eliminasjonsregelen for universell kvantor	325
10.2.4 Introduksjonsregelen for universell kvantor	328
10.2.5 Eliminasjonsregelen for eksistensiell kvantor	333
10.2.6 Et mer avansert eksempel	340
10.3 Avledede slutningsregler	341
10.4 Bevissystemet sammenfattet	347
10.5 Begreper introdusert i kapittel 10	348
11 METALOGIKK	349
11.1 Problemstillingene i predikatlogikken	349
11.2 Tremetoden	351
11.2.1 Tremetoden vil ikke alltid terminere	351
11.2.2 Sunnhet (gyldighetskorrekthet)	356
11.2.3 Ugyldighetskorrekthet	362
11.2.4 Fullstendighet og litt til	371
11.3 Naturlig deduksjon	373

11.4 Andre predikatlogiske egenskaper	374
11.5 Begreper introdusert i kapittel 11	375
12 PREDIKATLOGIKK MED IDENTITET	377
12.1 Utvidelsen av det predikatlogiske språket	377
12.1.1 Identitetsrelasjonen 377	
12.1.2 Syntaktisk beskrivelse av det utvidede språket 379	
12.1.3 Formell semantikk 381	
12.2 Tre metoden	389
12.2.1 Tre regelen for identitet 389	
12.2.2 Modifisering av begrepet om lukkede stier 396	
12.2.3 Modifisering av begrepet om avsluttede stier 398	
12.3 Naturlig deduksjon	400
12.3.1 Eliminasjonsregelen for identitet 400	
12.3.2 Introduksjonsregelen for identitet 404	
12.4 Metalogikk	406
12.4.1 Tre metoden 406	
12.4.2 Naturlig deduksjon 414	
12.5 Begreper introdusert i kapittel 12	414
TILLEGG: SLUTNINGSREGLENE I NATURLIG DEDUKSJON	417
LITTERATUR	423